SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

G. CITTI

SOLUZIONI POSITIVE DI EQUAZIONI QUASILINEARI ELLITTICHE DEGENERI SU APERTI NON LIMITATI IN R^n

16 FEBBRAIO 1989

INTRODUZIONE

In questa nota presentiamo alcuni teoremi di esistenza di soluzioni positive dell'equazione

$$(1) \qquad \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) - |u|^{s-2}u + f(x)|u|^{q-2}u = 0$$

in Ω, aperto non limitato di R^n, con $1<p<n$, $1<s<np/(n-p)$, $\max(p,s)<q<np/(n-p)$.

Le difficoltà che si incontrano nello studio di questa equazione sono legate al fatto che, a causa della non limitatezza di Ω, l'immersione di Sobolev $H^{1p}(\Omega)\to L^q(\Omega)$, $q<np/(n-p)$, non è compatta. D'altra parte, se Ω è radialmente simmetrico, la restrizione dell'immersione alle funzioni radialmente simmetriche è compatta, e questo permette di ottenere teoremi di esistenza, nel caso in cui (1) abbia essa stessa una struttura radiale, cioè nel caso in cui f sia costante (cf. [BL], [C1], [EL1]). Anche altri tipi di simmetria del dominio consentono di trovare soluzioni di (1) (cf. [CM] nel caso p=2). Se $f(x)\to 0$ per $|x|\to+\infty$, anche se Ω non ha proprietà di simmetria, si può recuperare una compattezza nell'immersione di Sobolev, ed ottenere teoremi di esistenza (cf. [St]).

In questa nota noi supponiamo che $f:\Omega\to R$ sia continua, non negativa e che esista

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = f_0 > 0.$$

Se p=s=2, l'equazione (1) si scrive

$$(2) \qquad \Delta u - u + f(x)|u|^{q-2}u = 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Per questa equazione, e se $R^n\setminus\Omega$ è un compatto (senza alcuna proprietà di simmetria), si possono ottenere teoremi di esistenza di soluzioni, sfruttando la unicità, a meno di traslazioni nella variabile x, della soluzione positiva del

l'equazione

$$(3) \qquad \Delta u - u + f_0 |u|^{q-2} u = 0 \quad \text{in} \quad R^n.$$

Risultati in questa direzione si debbono a Benci e Cerami [BC] e a Bahri e Lions [BaL] (per i teoremi di unicità si vedano [GNN], [MS] e [K]). Osserviamo esplicitamente che le tecniche utilizzate da questi autori non si possono estendere al caso dell'equazione quasilineare (1), perché non si conoscono teoremi di unicità per questa equazione. Ding e Ni [DN] e Lions ([L2], [L3]) hanno invece provato teoremi di esistenza per l'equazione (2) senza sfruttare l'unicità della soluzione dell'equazione (3). Il metodo da essi applicato si basa sul confronto della equazione (2) con la corrispondente equazione all'infinito (3) e si può utilizzare anche nel caso quasilineare (1). I risultati che esporremo nei paragrafi 1,2 sono contenuti nella nota [C2], mentre quelli contenuti nel paragrafo 4 sono nuovi.

Se indichiamo E la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ con la norma

$$\|u\| = \|u\|_E = \left(\int_\Omega |Du|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |u|^s dx\right)^{1/s},$$

le soluzioni di (1) sono i punti critici del funzionale

$$J: E \to R \qquad J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx + \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx - \frac{1}{q}\int_\Omega f(x)|u|^q dx.$$

Sia I il funzionale associato ai valori di f all'infinito:

$$I: E \to R \qquad I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx + \frac{1}{s}\int_\Omega |u|^s dx - \frac{1}{q}\int_\Omega f_0|u|^q dx.$$

Indichiamo $M_J = \{u \in E: u \neq 0,\ dJ(u)(u)=0\}$ e $M_I = \{u \in E: u \neq 0,\ dJ(u)(u)=0\}$.

Come vedremo le soluzioni di (1) si possono anche determinare come punti critici del funzionale J, condizionati sulla varietà M_J. Utilizzando questa osservazione è possibile trovare una soluzione u_k di (1) su $B_k \cap \Omega$ per ogni $k \in N$. La successione (u_k) contiene una sottosuccessione debolmente convergente ad una funzione $\bar{u}$, che è soluzione debole di (1). Se $\bar{u}$ è non triviale, allora è una soluzione positiva su Ω. Il punto fondamentale è provare che $\bar{u}$ non è identicamente nulla. Una condizione sufficiente ad assicurarlo è che $\inf_{M_I} I > \inf_{M_J} J$.

1. Il TEOREMA DI ESISTENZA

Teorema 1. *Se* $\inf_{M_I} I > \inf_{M_J} J$, *allora (1) ha una soluzione positiva.*

Osservazione 2. *Valgono le seguenti affermazioni:*

i) $$\forall u \in M_J \quad J(u) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \int_\Omega |Du|^p dx + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{q}\right) \int_\Omega |u|^s dx.$$

ii) $$\inf_{M_J} J > 0, \quad \inf_{M_J} \int_\Omega |u|^q dx > 0.$$

iii) *Se* u *realizza il minimo di* J *su* M_J, u *è soluzione di (1), e si può supporre che* $u \geq 0$ *in* Ω.

Dimostrazione.

i) si ottiene dall'espressione di J e dal fatto che

$$dJ(u)(u) = \int_\Omega |Du|^p dx + \int_\Omega |u|^s dx - \int_\Omega f(x)|u|^q dx = 0.$$

ii) Da i) segue che $J(u) \geq 0$ per ogni $u \in M_J$. Se $\inf_{M_J} J = 0$, allora esiste una suc

cessione (v_k) in M_J tale che $J(v_k)\to 0$ per $k\to+\infty$, quindi

$$\int_\Omega |Dv_k|^p dx + \int_\Omega |v_k|^s dx = \int_\Omega f(x)|v_k|^q dx =$$

(se indichiamo $q=\theta s+(1-\theta)p^*$, per la diseguaglianza di Hölder)

$$\leq C_1\Big(\int_\Omega |v_k|^s dx\Big)^\theta \Big(\int_\Omega |v_k|^{p^*} dx\Big)^{1-\theta} \leq$$

$$\leq C_1\Big(\int_\Omega |v_k|^s dx\Big)^\theta \Big(\int_\Omega |Dv_k|^p dx\Big)^{(1-\theta)p^*/p} \leq$$

$$\leq C_2^{\cdot}\Big(\int_\Omega |Dv_k|^p dx + \int_\Omega |v_k|^s dx\Big)^{\theta+(1-\theta)p^*/p}$$

e questo è assurdo perché $\theta+(1-\theta)p^*/p>1$, e $\int_\Omega |Dv_k|^p dx + \int_\Omega |v_k|^s dx \to 0$.

Se esiste una successione in M_J tale che $\int_\Omega |v_k|^q dx\to 0$, allora da $dJ(v_k)(v_k)=0$, segue che

$$\int_\Omega |Dv_k|^p dx + \int_\Omega |v_k|^s dx = \int_\Omega f(x)|v_k|^q dx \to 0 \text{ per } k\to\infty$$

Questo è assurdo per quanto abbiamo già provato.

iii) Indichiamo $\Phi(u)=dJ(u)(u)$. Se u realizza il minimo di J su M_J, esiste un moltiplicatore di Lagrange λ tale che $dJ(u) = \lambda d\Phi(u)$. Supponiamo che $\lambda\neq 0$. Allora procedendo come al punto i), si dimostra che queste due condizioni sono incompatibili se $u\neq 0$. Quindi $\lambda=0$ e $dJ(u) = 0$. Ovviamente, se u realizza il minimo, anche $|u|$ lo realizza, quindi possiamo assumere che $u\geq 0$.

Indichiamo $\Omega_k = \Omega\cap B(0,k)$.

Lemma 3. *Per ogni* $k\in N$ *esiste* u_k *soluzione positiva di* (1) *in* Ω_k. *Inoltre* (u_k) *contiene una sottosuccessione, che indichiamo ancora* (u_k) *e che converge debolmente in* E *e uniformemente sui compatti ad una soluzione* $\bar{u}$ *di* (1) *su* Ω.

Dimostrazione. Indichiamo E_k la chiusura di $C_0^\infty(\Omega_k)$ con la norma $|u|$. Per ogni $k\in N$ indichiamo con $u_k\in E_k$ la funzione che realizza il minimo di J su $\{u\in E_k: u\neq 0,\ dJ(u)(u)=0\}$.

Poiché $E_k\to E$, con un argomento di densità si può provare che

$$J(u_k)\to \inf\{J(u): u\in E,\ u\neq 0,\ dJ(u)(u)=0\} = \inf_{M_J} J.$$

Ma, per l'osservazione 2, i),

$$J(u_k) = \left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |Du_k|^p dx + \left(\frac{1}{s}-\frac{1}{q}\right)\int_\Omega |u_k|^s dx \quad \forall k\in N$$

quindi (u_k) è limitata e converge debolmente ad una funzione $\bar{u}\in E$. Dall'osservazione 2 segue anche che per ogni $k\in N$, (u_k) è soluzione di (1) su Ω_k, quindi, per le stime di Serrin [S] e di Tolksdorf [T2], $u_k\to\bar{u}$ e $Du_k\to D\bar{u}$ uniformemente sui compatti. Pertanto $\bar{u}$ è soluzione su tutto Ω. Poiché $u_k(x)\geq 0$ per ogni k, passando al limite si ha $\bar{u}(x)\geq 0\ \ \forall x\in\Omega$.

Lemma 4. *Valgono le seguenti affermazioni:*

i) se $\int_\Omega f(x)|u|^q dx \neq 0$, allora $\exists!\ t>0$ tale che $dJ(tu)(tu) = 0$

ii) se $dJ(u)(u) = 0$, allora $J(u) = \max_{t\geq 0} J(tu)$

Dimostrazione

i) Supponiamo che sia $p>s$ (la dimostrazione è analoga se $p\leq s$)

$$dJ(tu)(tu) = t^p \int_\Omega |Du|^p dx + t^s \int_\Omega |u|^s dx - t^q \int_\Omega f(x)|u|^q dx =$$

$$= t^p \Big(\int_\Omega |Du|^p dx + t^{s-p} \int_\Omega |u|^s dx - t^{q-p} \int_\Omega f(x)|u|^q dx \Big) = t^p g(t),$$

dove questa uguaglianza definisce g. La funzione g verifica $g(t)\to-\infty$ per $t\to+\infty$, $g(t)\to+\infty$ per $t\to 0+$, quindi esiste $t>0$ tale che $g(t)=0$.

ii) Se $h(t) = J(tu)$, basta dimostrare che h ha un massimo per $t=1$. Supponiamo per semplicità che $p>s$.

$$h'(t) = dJ(tu)(u) =$$

$$= t^{p-1} \int_\Omega |Du|^p dx + t^{s-1} \int_\Omega |u|^s dx - t^{q-1} \int_\Omega f(x)|u|^q dx =$$

(poiché $dJ(u)(u)=0$)

$$= (t^{s-1}-t^{p-1}) \int_\Omega |u|^s dx + (t^{p-1}-t^{q-1}) \int_\Omega f(x)|u|^q dx.$$

Quindi $h'(t) \geq 0$ se $t\leq 1$, $h'(t)\leq 0$ se $t\geq 1$ e $h(1) = \max_{t\geq 0} h(t)$.

Dimostrazione del Teorema 1. Siano (u_k) e $\bar{u}$ come nel lemma 3. Dobbiamo dimostrare che $\bar{u}\neq 0$. Per assurdo supponiamo invece $\bar{u}=0$. Allora $u_k\to 0$ per $k\to+\infty$ debolmente in E. Poiché $u_k \neq 0$, per il lemma 4, per ogni $k\in N$ esiste $t_k>0$ tale che $dI(t_k u_k)(t_k u_k) = 0$. Proviamo che (t_k) è limitata. Se $t_k\geq 1$ si ha

$$t_k^p \int_\Omega |Du_k|^p dx + t_k^s \int_\Omega |u_k|^s dx = t_k^q \int_\Omega f_o |u_k|^q dx \geq$$

(per l'osservazione (2)) $\geq C_2 t_k^q$.

D'altra parte

$$t_k^p \int_\Omega |Du_k|^p dx + t_k^s \int_\Omega |u_k|^s dx \leq C_3\, t_k^{\max(p,s)}$$

allora (t_k) è limitata, perché $\max(p,s)<q$.

Sia $\varepsilon>0$ fissato $\exists R>0$ tale che $|f(x)-f_o|<\varepsilon$ $\forall x\in\Omega$, $|x|>R$. Quindi

$$|I(t_k u_k)-J(t_k u_k)| \leq t_k^q \int_\Omega |f(x)-f_o|\, |u_k|^q\, dx \leq$$

$$\leq C_1 \int_{\{x\in\Omega:\,|x|\leq R\}} |u_k|^q\, dx + \varepsilon C_2 \int_{\{x\in\Omega:\,|x|>R\}} |u_k|^q\, dx \leq C_3\varepsilon$$

per k grande, perché la successione $\left(\int_\Omega |u_k|^q dx\right)$ è limitata, e possiamo supporre che $(u_k)\to 0$ per $k\to+\infty$ in $L^q(\{x\in\Omega:\ |x|\leq R\})$. Pertanto

$$\inf_{M_J} J \geq J(u_k)-\varepsilon \geq \text{(per il lemma 4)}$$

$$\geq J(t_k u_k)-\varepsilon \geq I(t_k u_k)-C_4\varepsilon \geq \inf_{M_I} I - C_4\varepsilon$$

quindi $\inf_{M_J} J \geq \inf_{M_I} I$ per l'arbitrarietà di ε, e questo è assurdo.

Osservazione 5. *Il metodo presentato nelle pagine precedenti si può applicare anche ad un'equazione del tipo*

$$\operatorname{div}((ADu\cdot Du)^{(p-2)/2} ADu) - a(x)|u|^{s-2}u + f(x,u) = 0 \quad \text{in } \Omega,$$

dove Ω *è un aperto di* R^n, $1<p<n$, $1<s<np/(n-p)$, $\max(p,s)<q<np/(n-p)$.

$0\leq f(x,u)\leq C(1+u^{q-1})$ $\quad \forall x\in\Omega$, $u>0$

$u \to \frac{f(x,u)}{u^{r-1}}$ è non decrescente in u $\forall x \in \Omega$, $u>0$ con $\max(p,s)<r\leq q$

$$\lim_{|x|\to+\infty} \frac{f(x,u)}{|u|^{q-1}} = f_0>0 \quad \text{uniformemente} \quad u > 0,$$

a(x) è continua, nonnegativa ed esiste $b_0>0$ tale che

$$\lim_{|x|\to+\infty} a(x) = b_0.$$

$A = (a_{ij})$ è una matrice a coefficienti $C^{\alpha}(\Omega)$ ed esistono a_1, $a_2>0$ tali che

$$a_1|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi = \sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq a_2|\xi|^2 \quad \forall \xi \in R^n, \ x \in \Omega$$

esiste una matrice $B = (b_{ij})$ a coefficienti costanti tale che

$$a_{ij}(x) \to b_{ij} \quad \text{per} \quad |x|\to\infty \ \forall i,j.$$

<u>Teorema 6.</u> *Se esiste* $w \in M_I$ *tale che* $I(w) = \min_{M_J} I$ *e* $J(tw) <$

$< I(tw)$ $\forall t>0$, *allora* $\inf_{M_I} I > \inf_{M_J} J$, *quindi l'equazione* (1) *ha una soluzione debole positiva in* Ω.

<u>Dimostrazione</u>. Se w è di minimo per I su M_I, per l'osservazione 2 iii) possiamo supporre che $w \geq 0$ in Ω. Allora per il lemma 4 esiste $t>0$ tale che $tw \in M_J$ e quindi

$$\inf_{M_J} J \leq J(tw) < \text{per ipotesi}$$

$$< I(tw) \leq \text{per il lemma 4}$$

$$\leq I(w) = \inf_{M_I} I$$

allora la conclusione segue dal teorema 1.

2. ALCUNI ESEMPI

Esempio A. *Se f è continua, nonnegativa e* $f(x) \xrightarrow[|x|\to+\infty]{} f_0 = \inf_{R^n} f$, *allora il problema*

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) - |u|^{s-2}u + f(x)|u|^{q-2}u = 0 \quad \text{in } R^n$$
$$u \geq 0$$

ha una soluzione debole.

Dimostrazione. Se $f \equiv f_0$, il risultato è vero (cf. [C1]). Supponiamo che f non sia costante, e verifichiamo le ipotesi del teorema 6. Sia (v_k) una successione in M_I tale che $I(v_k) \to \inf_{M_I} I$ per $k \to +\infty$, e sia v_k^* il riarrangiamento radiale di v_k (cf. [PS] e [T]). Poiché $v_k^* \neq 0$ e per il lemma 4 per ogni $k \in N$ esiste $t_k > 0$ tale che $t_k v_k^* \in M_I$. Inoltre, per la diseguaglianza di Polya e Szego

$$I(t_k v_k^*) = I((t_k v_k)^*) \leq I(t_k v_k).$$

D'altra parte, per il Lemma 4

$$I(t_k v_k) \leq I(v_k).$$

Allora

$$\inf_{M_I} I \le I(t_k v_k^*) \le I(v_k) \qquad \forall k \in N.$$

Pertanto anche (w_k), $w_k = t_k v_k^*$ è una successione minimizzante I su M_I. Allora (w_k) è limitata ed esiste $C_1>0$ tale che $\int_{R^n} |w_k|^q > C_1$ per ogni $k \in N$ (per l'affermazione 2 i) e ii)). Possiamo supporre che $w_k \rightharpoonup \bar{w}$ debolmente in E, e in norma $L^q(R^n)$ (cf. Teorema III.3. in [L1]), quindi

$$\bar{w} \ge 0, \qquad \int_{R^n} |\bar{w}|^q dx > 0$$

e per il lemma 4 esiste $t>0$ tale che $t\bar{w} \in M_I$. Allora

$$\inf_{M_I} I \le I(t\bar{w}) \le \liminf_{k\to+\infty} I(tw_k) \text{ (per il lemma di Fatou)}$$

$$\le \liminf_{k\to+\infty} I(w_k) \qquad \text{(per il lemma 4)}$$

$$= \inf_{M_I} I.$$

Quindi $I(t\bar{w})=\beta$. Poiché $\bar{w}$ è radialmente simmetrica e non identicamente nulla, $\bar{w}(0)>0$. D'altra parte f non è costante, ed esiste $x_0 \in R^n$ tale che $f(x_0)>\inf_{R^n} f = f_0$. Allora posto $w(x)=t\bar{w}(x-x_0)$, si ha $J(\tau w)<I(\tau w)$ $\tau>0$, e $I(w) = \inf_{M_I} I$, perché I è invariante per traslazioni.

Esempio B. *Siano* n_1, n_2 *interi tali che* $n=n_1+n_2$. *Sia* V *un aperto limitato di* R^{n_1} *e* $\Omega = V \times R^{n_2}$. *Sia* f *continua, nonnegativa e tale che* $f(x) \longrightarrow_{|x|\to+\infty} f_0 = \inf_{\Omega} f$ *e* $f(x) > f_0$ $\forall x \in \Omega$. *Allora il problema*

$$\operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) - |u|^{s-2}u + f(x)|u|^{q-2}u = 0$$
$$u \ge 0 \text{ in } \Omega$$

ha una soluzione.

Dimostrazione. La prova è analoga a quella dell'esempio 7. Infatti se v_k è una successione minimizzante possiamo considerare la simmetrizzazione radiale v_k^* rispetto alle ultime n_2 variabili. Per ogni k esiste allora $t_k>0$ tale che $w_k=t_k\ v_k^*\in M_I$ e (w_k) è ancora una successione minimizzante. D'altra parte l'immersione $L^q(\Omega)\subset E$ è compatta (cf. [EL2], [L1]), e quindi procedendo esattamente come nell'esempio 7, si prova che esiste un minimo w di I su M_I, che soddisfa tutte le ipotesi del teorema 6.

§ 3. ULTERIORI RISULTATI DI ESISTENZA

Altre condizioni su f che permettono di risolvere l'equazione (1) su tutto R^n, sono state determinate, almeno nel caso semilineare da Li [L], utilizzando il metodo di concentrazione di compattezza di P.L. Lions. Questi risultati valgono anche nel caso quasilineare e si possono formulare nel modo seguente:

1. Se $\forall\varepsilon>0\quad |\{x\in R^n: f(x)\geq \inf_{R^n} f+\varepsilon\}|<+\infty$, l'equazione (1) ha soluzione positiva.

2. Se $\forall r>0\quad D(r)=\int_{|x|\leq r}(f(x)-\limsup_{y\to+\infty} f(y))dx\geq 0$ e D(r) non è identicamente nullo, allora (1) ha soluzione positiva.

Queste condizioni sono soddisfatte se $f(x)\to\inf_{R^n} f$, ma sono effettivamente meno restrittive. Sia infatti $f(x)=1+\exp(-|x|^n)\cos(|x|)$; allora $f(x)\longrightarrow_{|x|\to+\infty} 1>\inf f$, ma la condizione 2. si può applicare.

Osservazione 9. Se $\Omega=R^n$ e $f(x)\to\sup_{R^n} f$ per $|x|\to+\infty$, allora $\inf_{M_I} I = \inf_{M_J} J$. Pertanto il teorema 1 non si può applicare. D'altra parte, se $f(x)=f(x_1)$

dove $x = (x_1,\dots,x_n)$ e f è strettamente crescente in x_1, Ni ha dimostrato che l'equazione (1) non ha alcuna soluzione, nemmeno nel caso semilineare (cf. [N]).

§ 4. IL CASO DI EQUAZIONI CON SIMMETRIA RADIALE

Se la funzione f è radialmente simmetrica e limitata, si possono applicare metodi standard per determinare soluzioni di

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du) - |u|^{s-2}u + f(r)|u|^{q-2}u = 0 \quad \text{in } R^n,\ r = |x|.$$

Cercando punti critici del funzionale J nello spazio di Sobolev E^r delle funzioni radiali di E, si possono trovare soluzioni di (5) anche quando f, radialmente simmetrica non cresce troppo rapidamente.

Teorema 10. *Supponiamo che f sia continua, nonnegativa, e* $\forall\, r>0$

$$f(r) \le C(1+r^{\beta}) \quad \text{con} \quad \beta < \frac{p'}{p'+s}(n-1)(q-s), \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Allora l'equazione (5) *ha una soluzione* $\bar{u} \geqq 0$ *in* R^n *(per il caso semilineare si veda* [DN]).

Questo teorema si può considerare ottimale, poiché se $p=s=2$ la condizione su f diventa $f(r)\le C(1+r^{\beta})$, con $\beta < \frac{1}{2}(n-1)(q-2)$, e si può dimostrare che, se $f(r)r^{-(n-1)(q-2)/2}$ è non decrescente, l'equazione non ha soluzione (cf. [L]).

Indichiamo con E^r l'insieme delle funzioni radiali di E e E_k^r l'insieme delle funzioni radiali di E_k. Se definiamo

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{R^n} |Du|^p dx + \frac{1}{s}\int_{R^n} |u|^s dx - \frac{1}{q}\int_{R^n} f(x)|u|^q dx,$$

J non è in generale ben definito in E^r, ma è ben definito in E_k^r.

Lemma 11. Per ogni $u \in E^r$ si ha

$$|u(r)| \leq C\|u\| r^{(1-n)p'/(p'+s)} \qquad \text{q.d. } r > 0$$

dove $p' = \frac{p}{p-1}$ *e* C *dipende solo da* n,p,s. (cf. Proposizione II.1., [L1]).

Lemma 12. *Per ogni* $k \in N$ *esiste una soluzione positiva* $u_k \in E_k^r$ *dell'equazione* (5) *su* B_k. *Inoltre* (u_k) *contiene una sottosuccessione, che indichiamo ancora* (u_k), *che converge debolmente in* E *e uniformemente sui compatti ad una soluzione debole di* (5) *su* R^n.

Dimostrazione. La dimostrazione è essenzialmente la stessa del lemma 3. Per ogni $k \in N$ indichiamo con u_k la funzione che realizza il minimo di J sull'insieme $\{u \in E_k^r : u \neq 0,\ dJ(u)(u)=0\}$. La successione $(J(u_k))$ è monotona decrescente, e quindi (u_k) è limitata. Procedendo come nel lemma 3 si prova l'affermazione di questo lemma. Non possiamo tuttavia escludere a priori che $J(u_k) \to 0$ per $k \to +\infty$.

Dimostrazione del teorema 10. Poiché $dJ(u_k)(u_k)=0$, si ha

$$\int_0^k r^{n-1} f(r) |u_k|^q = \int_0^k r^{n-1} |Du_k|^p \, dr + \int_0^k r^{n-1} |u_k|^s dr >$$

$$> \int_0^k r^{n-1} |u_k|^s \, dr,$$

Pertanto esiste $r_k \in]0,k[$ tale che $f(r_k) > |u_k^{s-q}(r_k)| = u_k^{s-q}(r_k)$ per ogni $k \in N$. Proviamo che (r_k) è limitata. Se infatti $r_k > 1$ $\forall k \in N$, per le ipotesi fatte su f, si ha

$$(6) \qquad u_k^{s-q}(r_k) < C_1(1 + r_k^{\beta}) < C_2 r_k^{\beta}.$$

Applicando il lemma 11 si ha allora

$$r_k^{(q-s)(n-1)p'/(p+s)-\beta} \leq C_3$$

e quindi (r_k) è limitata per la scelta di β. Da 6) otteniamo inoltre

$$\exists C_4 \text{ tale che } u_k(r_k) \geq C_4 \ \forall k \in N.$$

Possiamo anche supporre che $r_k \to r_o$ per $k \to +\infty$, e per la convergenza uniforme di (u_k) a $\bar{u}$, si ha $u_k(r_k) \to \bar{u}(r_o) \geq C_4$. Quindi $\bar{u} \neq 0$.

BIBLIOGRAFIA

[BaL] A. BAHRI and P.L. LIONS, On the Existence of a Positive Solution of Semilinear Elliptic Equations in Unbounded Domains, to appear.

[BC] V. BENCI and G. CERAMI, Positive Solutions of Some Nonlinear Elliptic Problems in Exterior Domains, Arch. Rational Mech. anal., 99, 4 (1987), 283-300.

[BL] H. BERESTYCKI and P.L. LIONS, Nonlinear Scalar Field Equations, I, Existence of a Ground State, Arch. Rational Mech. Anal., 82 (1983), 313-345.

[C1] G. CITTI, Positive Solutions for a Quasilinear Degenerate Elliptic Equation in R^n, Rend. Circ. Mat. Palermo, s. II, 35 (1986), 364-375.

[C2] G. CITTI, Existence of Positive Solutions of Quasilinear Degenerate Equations on Unbounded Domains, Ann. Mat. Pura Appl., to appear.

[CM] C.V. COFFMAN and M.M. MARCUS, Existence Theorems for Superlinear Elliptic Dirichlet Problems in Exterior Domains, Proc. Symposia Pure math., 45 (1986), 271-283.

[DN] W.Y. DING and W.M. NI, On the Existence of Positive Entire Solutions of a Semilinear Elliptic Equation, Arch. Rational Mech. Anal., 91, 4 (1986), 283-308.

[EL1] M.J. ESTEBAN and P.L. LIONS, Existence and non Existence Results for Semilinear Elliptic Problems in Unbounded Domains, Proc. Royal Edinbourgh Soc., 93 A (1982), 1-14.

[EL2] M.J. ESTEBAN and P.L. LIONS, A Compactness Lemma, Nonlin. Anal., 7(4) (1983), 381-385.

[GNN] B. GIDAS, W.M. NI and L. NIREMBERG, Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in R^n, Adv. in Math. Suppl. Stud. 7A, Math. Anal. Appl., Part A (1981), 369-402.

[K] M.K. KWONG, Uniqueness of Positive Solutions of $\Delta u-u+u^p=0$ in R^n, to appear.

[L] Y. LI, Remarks on a Semilinear Elliptic Equation on R^n, J. Diff. Eq., 74 (1988), 34-49.

[L1] P.L. LIONS, Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev, J. Funct. anal., 49 (1982), 315-334.

[L2] P.L. LIONS, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, part 1., Ann. I. H.P. Anal. non linéaire, v. 1,n. 2, (1984), 109-145.

[L3] P.L. LIONS, The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The Locally Compact Case, part 2. Ann. I. H.P. Anal. non linéaire, v. 1, n. 4 (1984), 223-283.

[MS] K. McLEOD and J. SERRIN, Uniqueness of Positive Radial Solutions of $\Delta u+f(u)=0$ in R^n, Arch. Rational Mech. Anal. 99, 2, (1987), 115-145.

[N] W.M. NI, Some Aspects of Semilinear Elliptic Equations in R^n, in AA.VV., Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States (W.M. Ni, L.A. Peletier and J. Serrin, Eds.), Springer-Verlag, New York/Berlin 1988.

[S] J. SERRIN, Local Behaviour of Solutions of Quasilinear Equations, Acta math., 111 (1964), 247-302.

[St] C.A. STUART, Bifurcation for Dirichlet Problems without Eigenvalues, Proc. London Math. Soc., (3), 45 (1982), 169-192.

[PS] G.P. POLYA and G. SZEGO, Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics, Ann. Math. Studies, n. 27, Princeton (1951).

[T] G. TALENTI, Best Constant in Sobolev Inequality, Ann. Mat. Pura Appl., 110 (1976), 353-372.

[T1] P. TOLKSDORF, On the Dirichlet Problem for Quasilinear Equations in Domains with Conical Boundary Points, Comm. Partial Diff. Eq., 8 (7) (1983), 773-817.

[T2] P. TOLKSDORF, Regularity for a More General Class of Quasilinear Elliptic Equations, J. Diff. Eq., 51 (1984), 126-150.